Köşegenleştirme ve Benzer Matrisler

Tanım: n-boyutlu bir V vektör uzayı üzerinde bir $L: V \to V$ lineer dönüşümü verilsin. Eğer V nin bir S bazına göre L ye karşılık gelen bir D köşegen matrisi varsa L ye köşegenleştirilebilir veya köşegenleşebilir, denir.

Örnek: $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(a_1, a_2, a_3) = (2a_1 - a_3, a_1 + a_2 - a_3, a_3)$

lineer dönüşümünün $\mathbb{R}^3$ ün bir

$$S' = \{(1,0,1), (0,1,0), (1,1,0)\}$$

bazına göre matrisi

$$L_{S'} = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

O halde L köşegenleştirilebilir ve bir lineer dön.dür.

Teorem: V n-boy. bir vektör uzayı ve $L: V \to V$ lineer dön. olsun. L nin köşegenleştirilebilir olması için $\Leftrightarrow$ V nin L nin kar. vektörlerinden oluşan bir S bazına sahip olmasıdır. Ayrıca, eğer D, S bazına göre L nin köşegen matrisi ise D nin köşegeni üzerindeki elemanlar L nin kar. değerleridir.

İspat: $\Rightarrow$ $L: V \to V$ lineer dön. köşegenleştirilebilir olsun. O halde V nin bir $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ bazı için L ye karşılık gelen

$$L_S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

köşegen matrisi vardır.

$L(\lambda_1), L(\lambda_2) \dots L(\lambda_n)$ bu matrisin sırası ile

1, 2., ..., j. ... n. sütunlarını verir. Yani

$$L(\alpha_j) = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \dots + \lambda_j \alpha_j + \dots + 0.\alpha_n$$

olup buradan $L(\alpha_j) = \lambda_j \alpha_j$ old. dan

$\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$ L nin karakteristik vek.ıdır

$\Leftarrow$) Tersine $S = \{\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n\}$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$

L nin kar. vekt. olsun.

$$L(\alpha_1) = \lambda_1 \alpha_1 \;,\; L(\alpha_2) = \lambda_2 \alpha_2 , \dots L(\alpha_n) = \lambda_n \alpha_n$$

$$L_S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$ olup L köşegenleştirilebilir.

<u>Örnek:</u> $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi köşegenleştirilebilir midir?

A nın karakteristik değerlerini bulalım.

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0$$

O halde karakteristik değerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$ olur. Şimdi bunlara karşılık gelen karakteristik vektörleri bulalım.

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ için $A(\alpha) = -\alpha$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ -\alpha_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{array}$$

O halde $\alpha_2 = t$, $\alpha_3 = k$ için $\alpha_1 = -t-k$ olur

$t=1$, $k=0$ için $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 0$ olup

kar. vekt. $V_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dır.

$t=0$, $k=1$ için $V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dir.

$c_2 = 2$ için $A(\alpha) = 2\alpha$ olup

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_2 + \alpha_3 = 2\alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 2\alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha_3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{array}$$

lineer denk. sist. çözelim.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

$\alpha_3 = t$ $\quad \alpha_2 = -t$ $\quad \alpha_1 = -3t$

$t=1$ için $V_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\{V_1, V_2, V_3\}$ $\mathbb{R}^3$ için baz old. dan A köşegenleştirilebilirdir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ Matrisi köşegenleştirilebilir midir?

A nın karakteristik değerleri $\lambda_1=\lambda_2=1$ ve buna karşılık gelen kar. vektörlerde $\begin{bmatrix}r\\0\end{bmatrix}$ dır. Yani kar. vektörler $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ in bir katıdır. A iki lineer bağımsız vektöre sahip olmadığından köşegenleştirilemez.

Teorem: Bir nxn matrisinin karakteristik polinomunun kökleri reel ve hepsi birbirinden farklı ise A matrisi köşegenleştirilebilirdir.

Sonuç: Farklı kar. değerlere karşılık gelen kar. vekt cümlesi lineer bağımsızdır.

Tanım (Benzer Matrisler): A ve B nxn matrisleri için $B=P^{-1}AP$ olacak biçimde regüler bir P matrisi varsa B matrisi A ya benzerdir.

B, A ya benzer ise A nın B ye benzer olduğu tanımdan görülebilir. Bu nedenle "A, B ye benzerdir" yada "B, A ya benzerdir" ifadeleri yerine "A ve B benzerdir" kullanırız.

Teorem: Benzer matrisler aynı karakteristik değerlere sahiptirler.

İspat: A ve B benzer matrisler olsun. O halde P regüler matrisi için $B=P^{-1}AP$ dir. A ve B nin karakteristik polinomları olan $P_A(\lambda)$ ve $P_B(\lambda)$ nın aynı olduğunu gösterelim.

$$P_B(\lambda)=\det(\lambda I_n-B)=\det(\lambda I_n-P^{-1}AP)$$
$$=\det(\lambda P^{-1}P-P^{-1}AP)$$
$$=\det P^{-1}.\det(\lambda I_n-A).\det P$$
$$=P_A(\lambda)$$

Teorem: Bir $n\times n$ A matrisinin bir D köşegen matrisi ile benzer olması için $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^n$ nin A nın karakteristik vektörlerinden oluşan bir baza sahip olmasıdır. Ayrıca D'nin esas köşegeni üzerindeki elemanları A nın karakteristik değerleridir.

Not: A matrisi bir köşegen matris ile benzer ise A ya köşegenleştirilebilir veya köşegenleşmiştir denir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 4\end{bmatrix}$ için A nın karakteristik değerleri $\det(\lambda I_n-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ 2 & \lambda-4\end{vmatrix}=0$

$$(\lambda-1)(\lambda-4)+2=0$$
$$\lambda^2-5\lambda+6=0 \quad \lambda_1=2 \quad \lambda_2=3$$

bunlara karşılık gelen karakteristik vektörler,

$$A(\alpha_1)=\lambda_1\alpha_1 \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}x_1+x_2=2x_1\\ -2x_1+4x_2=2x_2\end{array}\right\} \begin{array}{l}x_1=1\\ x_2=1\end{array}$$

$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ ve $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$ dir.

$S=\{\alpha_1,\alpha_2\}$ $\mathbb{R}^2$ için baz old.dan A köşegenleştirilebilirdir.
Ayrıca A ile benzer olan matris $D=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ olur.

Gerçekten;

P nin sütunları A nın bir kar. vektörüdür. O halde A nın karakteristik vektörleri P nin sütunlarını oluşturur.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = D \text{ olur.}$$